

(1) (10 درجات) احسب التكاملين الآتيين:

a) $\int \frac{1}{3} x^3 \sqrt{9-x^2} dx$

b) $\int \sin^2 3x \cos 3x dx$

(2) (10 درجات) احسب طول منحنى الكاردويد Cardioid المعطى بالمعادلة

$$r = f(\theta) = 2 - 2\cos\theta$$
 والمحدود بين النقطتين $\theta = 0$ و $\theta = 2\pi$

(3) (15 درجة) ليكن $T(x, y, z) = 20 + 2x + 2y + z^2$ تابعاً يمثل درجة الحرارة في كل نقطة علىسطح الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 11$ ، استخدم نظرية مضاريب لاغرانج Lagrange multipliers

لتحديد القيم القصوى لدرجة الحرارة على المنحنى الناتج من تقاطع الكرة مع المستوى

$$x + y + z = 3$$

(4) (15 درجة) أوجد الحل العام للمعادلتين التفاضيلتين التاليتين:

(a) $(x^2 - y^2) dx + 3xy dy = 0$

(b) $y' + xy = xe^{-x^2} y^{-3}$

(5) (10 درجات) لدى سقوط جسم كتلته m من طائرة، تعطى معادلة الحركة كمعادلة تفاضلية على

النحو التالي:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g$$

حيث أن k ثابت الاحتكاك و g ثابت الجاذبية الأرضية، والمطلوب أوجد سرعة الجسم v بدلالة الزمن t مع العلم مسبقاً أن مقاومة الهواء تتناسب طردياً مع سرعة الجسم.(6) (10 درجات) لتكن معادلة ريكاتي Ricatti equation معطاة بالشكل $y' + 2ty = 1 + t^2 + y^2$

والمطلوب:

(a) بيّن أن $y_1(t) = t$ هو حل لمعادلة ريكاتي(b) بفرض أن $y(t) = t + (1/v(t))$ ، وضح بأنه عندئذٍ يمكن كتابة معادلة ريكاتي كمعادلةتفاضلية خطية من المرتبة الأولى بالنسبة للمتحول v

هذا السؤال (a) لإزالة الجذر يمكن أن نفرض $x = 3 \sin \theta$ أو $u = 9 - x^2$ ، لنأخذ
هنا الفرض المعطى بدلالة التابع المثلثي، مع العلم أن الفرض الآخر يمكن
أن يكون أسهل.

$$\int \frac{1}{3} x^3 \sqrt{9 - x^2} \cdot dx = \int 81 \cdot \sin^3 \theta \cdot \cos^2 \theta \cdot d\theta ; (x = 3 \sin \theta, dx = 3 \cos \theta \cdot d\theta)$$

$$= \int 81 (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta \cdot \cos^2 \theta \cdot d\theta ; (u = \cos \theta, du = -\sin \theta \cdot d\theta)$$

$$= \int 81 (u^4 - u^2) \cdot du$$

$$= \frac{81 \cdot \cos^5 \theta}{5} - 27 \cos^3 \theta + C ; (\cos \theta = \frac{1}{3} \sqrt{9 - x^2})$$

$$= \frac{(9 - x^2)^{5/2}}{15} - (9 - x^2)^{3/2} + C$$

(b) لدينا $\int \sin^2 3x \cdot \cos 3x \cdot dx$ ، بما أن $\sin^2 3x = (\sin 3x)^2$ ، يمكن أن نفرض $u = \sin 3x$
وعندئذٍ: $du = (\cos 3x)(3) \cdot dx \iff \frac{du}{3} = \cos 3x \cdot dx$ ، والآن

بالتعويض نجد:

$$\int \sin^2 3x \cdot \cos 3x \cdot dx = \int u^2 \cdot \frac{du}{3}$$

$$= \frac{1}{3} \int u^2 \cdot du$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{u^3}{3} \right) + C$$

$$= \frac{1}{9} \sin^3 3x + C$$

السؤال الثاني: بمات
كما يلي:

السؤال الثاني: بمات

كما يلي:

$$S = \int_a^b \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2} \cdot d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(2-2\cos\theta)^2 + (2\sin\theta)^2} \cdot d\theta$$

$$= 2\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos\theta} \cdot d\theta$$

$$= 2\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin^2\frac{\theta}{2}} \cdot d\theta$$

$$= 4 \int_0^{2\pi} \sin\frac{\theta}{2} \cdot d\theta$$

$$= 8 \left[-\cos\frac{\theta}{2} \right]_0^{2\pi}$$

$$= 8(1+1)$$

$$= 16$$

الثالث لدينا هنا شرطين هما: $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = 11$ و $h(x,y,z) = x + y + z = 3$

$$\nabla T(x,y,z) = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}$$

والآن بالنظر إلى أنه

$$\lambda \cdot \nabla g(x,y,z) = 2\lambda x\vec{i} + 2\lambda y\vec{j} + 2\lambda z\vec{k}$$

$$\mu \cdot \nabla h(x,y,z) = \mu\vec{i} + \mu\vec{j} + \mu\vec{k}$$

يمكن عندئذ كتابة جملة المعادلات الآتية:

- ① $2 = 2\lambda x + \mu \leftarrow \frac{\partial T(x,y,z)}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g(x,y,z)}{\partial x} + \mu \frac{\partial h(x,y,z)}{\partial x}$
- ② $2 = 2\lambda y + \mu \leftarrow \frac{\partial T(x,y,z)}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g(x,y,z)}{\partial y} + \mu \frac{\partial h(x,y,z)}{\partial y}$
- ③ $2z = 2\lambda z + \mu \leftarrow \frac{\partial T(x,y,z)}{\partial z} = \lambda \frac{\partial g(x,y,z)}{\partial z} + \mu \frac{\partial h(x,y,z)}{\partial z}$
- ④ $x^2 + y^2 + z^2 = 11$ الشرط الأول
- ⑤ $x + y + z = 3$ الشرط الثاني

بطرح المعادلة ② و المعادلة ③ من المعادلة ① ، نحصل على :

$$\lambda(x - y) = 0$$

$$2z(1 - \lambda) - \mu = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

$$x + y + z = 0$$

من المعادلة الأولى نستنتج إما $\lambda = 0$ أو $x = y$. ففي حال $\lambda = 0$ ، عندئذ

يمكن أن نوضح بالحل أن النقاط الحرجة هي: $(3, -1, 1)$ و $(-1, 3, 1)$

أما في حال $\lambda \neq 0$ ، عندئذ $x = y$ ، وهنا بالتقويض بالمعادلات السابقة ننتج عندئذ

$x = y = (3 \pm 2\sqrt{3})/3$ و $z = (3 \mp 4\sqrt{3})/3$ هي النقاط الحرجة الموافقة .

وأخيراً ، لتحديد القيم المقصودة ، نقارن درجات الحرارة عند النقاط الحرجة الأربعة

$$T(3, -1, 1) = T(-1, 3, 1) = 25$$

التي حصلنا عليها ، فنجد

$$T\left(\frac{3-2\sqrt{3}}{3}, \frac{3-2\sqrt{3}}{3}, \frac{3+4\sqrt{3}}{3}\right) = T\left(\frac{3+2\sqrt{3}}{3}, \frac{3+2\sqrt{3}}{3}, \frac{3-4\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{91}{3} \approx 30.33$$

وعليه ، فإن درجة الحرارة الصغرى هي $T = 25$ و درجة الحرارة العظمى هي $T = \frac{91}{3}$ على

المخني الناتج من تقاطع الكرة مع المستوي .

السؤال الرابع: a) بمانت $(x^2 - y^2)$ و $3xy$ مقاسات وهما من الدرجة الثانية، عند
نفرض $y = vx$ ، فنجد $dy = x \cdot dv + v \cdot dx$ ، وبالتعويض الآن نحصل على:

$$(x^2 - v^2 x^2) dx + 3x(vx) \overbrace{(x \cdot dv + v \cdot dx)}^{dy} = 0$$

$$(x^2 + 2v^2 x^2) dx + 3x^3 v \cdot dv = 0$$

$$x^2 (1 + 2v^2) dx + x^2 (3vx) \cdot dv = 0$$

نقسم على x^2 ومن ثم نفصل المتحولين، فينتج:

$$(1 + 2v^2) \cdot dx = -3v \cdot x \cdot dv \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int \frac{-3v}{1 + 2v^2} \cdot dv$$

$$\ln x = -\frac{3}{4} \ln (1 + 2v^2) + C_1$$

$$4 \ln |x| = -3 \ln (1 + 2v^2) + \ln |C|$$

$$\ln x^4 = \ln |C| (1 + 2v^2)^{-3}$$

$$x^4 = C (1 + 2v^2)^{-3}$$

والآن بالتعويض عن v بقيمتها، فنحصل على الحل العام على النحو التالي:

$$x^4 = C \left[1 + 2 \left(\frac{y}{x} \right)^2 \right]^{-3} \Rightarrow \left(1 + \frac{2y^2}{x^2} \right) x^4 = C \Rightarrow (x^2 + 2y^2)^3 = Cx^4$$

(b) لدينا هنا $y' + xy = x e^{-x^2} y^{-3}$ معادلة تيرنولي، حيث $n = -3$ ولهذا نفرز

$$z = y^4 \Rightarrow z' = 4y^3 y'$$

لنضرب المعادلة المعطاة ب $4y^3$ فنجد:

$$4y^3 y' + 4xy^4 = 4x e^{-x^2} \Rightarrow z' + 4xz = 4x e^{-x^2}$$

وهذه معادلة خطية بالنظر للمتحول z ، وباستخدام الفرض $P(x) = 4x$ ، فينتج:

$$\int P(x) \cdot dx = \int 4x \cdot dx = 2x^2$$

وهذا يعني أن e^{2x^2} هو عامل تكامل، والآن بضرب المعادلة الخطية بعامل

$$z' e^{2x^2} + 4xz \cdot e^{2x^2} = 4x e^{x^2} \Rightarrow \frac{d}{dx} [z e^{2x^2}] = 4x e^{x^2}$$

$$z e^{2x^2} = \int 4x e^{x^2} \cdot dx = 2 e^{x^2} + C \Rightarrow z = 2 e^{-x^2} + C e^{-2x^2}$$

والآن بالتعويض عن z بقمتها، فيكون الحل العام

لدينا: $\frac{dv}{dt} + \frac{bv}{m} = g$ ، لنفرض الآن $b = \frac{k}{m}$ ، عندئذ يمكن فصل المتحولات وحصل على:

$$dv = (g - bv) dt$$

$$\int \frac{dv}{g - bv} = \int dt \Rightarrow -\frac{1}{b} \ln |g - bv| = t + C_1$$

$$\ln |g - bv| = -bt - bC_1$$

$$g - bv = C e^{-bt}$$

وبما أن الجسم يسقط سقوطاً حراً، فإن $v = 0$ عندما $t = 0$ ، وهكذا $g = C$ وعليه فإن

$$-bv = -g + g e^{-bt} \Rightarrow v = \frac{g - g e^{-bt}}{b} = \frac{mg}{b} (1 - e^{-kt/m})$$

السؤال السادس لبيان أن $y_1(t) = t$ هو حل لمعادلة ريكاكي، نشق فجد $y_1'(t) = 1$ ، ومن ثم نفرض في المعادلة المعطاة، فنستج:

$$y_1' + 2ty_1 = 1 + 2t^2$$

$$1 + t^2 + y_1^2 = 1 + t^2 + t^2 = 1 + 2t^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{الطرف الأيمن} = \text{الطرف الأيسر} \end{array} \right.$$

لذا $t = y_1(t)$ حل للمعادلة التفاضلية.

(b) لدينا $y(t) = t + \frac{1}{v(t)}$ $\Leftarrow y'(t) = 1 - \frac{1}{v^2} \cdot v'$ ، نفرض في المعادلة

$$1 - \frac{1}{v^2} \cdot v' + 2t(t + \frac{1}{v}) = 1 + t^2 + (t + \frac{1}{v})^2$$

بالإصلاح، فنستج

$$v'(t) = -1$$

وهي معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى بالسببة للمتحول v